



جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رضایانی

پاییز ۱۴۰۲

تجزیه ماتریس‌ها

تمرین پنجم

تاریخ انتشار: ۱۳ دی ۱۴۰۲

۱. پرسش‌های خود در مورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. همچنین هر تمرین تئوری و عملی را می‌توانید تا حداکثر ۳ روز با تاخیر تحویل دهید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین: دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به دست آوردن ایده‌ی کلی با یکدیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً توسط خود دانشجو انجام شود. حتماً در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.

۴. سوالات ۱ تا ۴ نمره کل تمرین را تشکیل می‌دهند. بنابراین سوالات ۵ تا ۸ غیر تحویلی می‌باشند.

تاریخ تحویل: ۲۸ دی ۱۴۰۲

سوالات تئوری (۸۰ نمره)

پرسش ۱ (۲۰ نمره) عبارت زیر را طبق تعریف نرم برای ماتریس اثبات کنید.

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$$

تعریف نرم ۲ برای ماتریس:

$$\max \{ \|Ax\|_2 : \|x\| = 1 \}$$

پرسش ۲ (۲۰ نمره) بردار ویژه ماتریس A با مقدار ویژه متناظر ناصفر است. نشان دهید v در فضای ستونی ماتریس A است.

پرسش ۳ (۲۰ نمره) ماتریس فیبوناچی به ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ گفته می‌شود می‌خواهیم این ماتریس را به شکل $A = U\Sigma V^T$ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{bmatrix}.$$

پرسش ۴ (۲۰ نمره) ویژگی‌های A^+ را بررسی کنید:

۱. برای هر $y \in \mathbb{R}^m$ یک $orthogonal projection$ از y در $Col(A)$ است.

۲. برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ یک $orthogonal projection$ از x در $Row(A)$ است.

۳. $AA^+A = A$ و $A^+AA^+ = A^+$.

دقت کنید که ماتریس A^+ همان $pseudo inverse$ می‌باشد.

پرسش ۵ (۰ نمره) اگر A شبیه ماتریس A^{-1} باشد، تمام مقادیر ویژه برابر ۱ یا -۱ هستند؟ اگر بله اثبات کنید در غیر این صورت مثال نقض بیاورید.

پرسش ۶ (۰ نمره) طبق $Cholesky factorization$ فرض کنید $A = C^T C$ که $C^T = L\sqrt{D}$ ، ماتریس بالا مثلثی C را برای هر دو مثال زیر پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

پرسش ۷ (۰ نمره) نشان دهید که اگر ماتریس A مثبت معین باشد، وجود دارد یک ماتریس مثبت معین B به طوری که $A = B^T B$.

پرسش ۸ (۰ نمره) اگر ماتریس A دارای ستون‌های دو به دو متعامد باشد که ستون w_i دارای اندازه σ_i است، ماتریس‌های $A^T A$ ، U ، Σ ، V را به دست آورید.

تاریخ تحویل: ۶ بهمن ۱۴۰۲

سوالات عملی (۲۰ نمره)

پرسش ۱ (۲۰ نمره) به نوت‌بوک مربوط به این تمرین مراجعه کنید.